Практическое занятие №13.

Задачи для самостоятельной работы студента

Решение задач по темам: **Формула Тейлора. Нахождение экстремума функции двух переменных.**

№	Задания
1	a) Разложить функцию $f(x,y)=e^x\cos y$ по формуле Тейлора с центром в точке $M_0(0,0)$ до членов четвертого порядка включительно. b) Разложить функцию $f(x,y)=2x^2-xy-y^2-6x-3y+5$ по формуле Тейлора с центром в точке $A(1,-2)$. c) Разложить функцию $f(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-3xyz$ по формуле Тейлора с центром в точке $A(1,1,1)$.
2	Найти экстремумы функций a) $z=xy(1-x-y)$ b) $z=2xy-4x-2y$ c) $z=y\sqrt{x}-y^2-x+6y$ d) $z=2x^3-xy^2+5x^2+y^2$ e) $z=x^3+y^3-3xy$ f) $u=x^2+y^2+z^2+2x+4y-6z$.
3	Найти экстремумы функции z при соответствующем условии a) $z=x^2+y^2$, если $y^2-x=0$ b) $z=2x^2-4x+y^2-8y+3$, если $x+y+6=0$
4	Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z=x-2y-3$, *если* $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$, $0\le x+y\le 1$

ОБРАЗЦЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задачи из Лекции №13 (ФИТ)

Пример 1. Разложить функцию $f(x,y)=e^{x/y}$ по формуле Тейлора с центром в точке $M_0(0,1)$ до членов второго порядка включительно.

Пример 2. Найти разложение по формуле Тейлора для функции $f(x,y)=e^x\sin y$ в точке $O(0,0)$ до слагаемых третьего порядка включительно.

Пример 3. Найти квадратичное приближение для функции $f(x,y)=x^y$ в окрестности точки $M(1,1)$ и вычислить приближённо значение выражения $0{,}98^{1{,}05}$.

Пример 4. Найти разложение многочлена $f(x,y)=x^3-2y^3+3xy$ по степеням биномов $(x-1)$ и $(y-2)$.

Пример 5. Найти экстремум функции $z=3x^2y-x^3-y^4$.

Пример 6. Найти точки экстремума функции: $z=x^3-3x+y^2+6y+16$

Пример 7. Исследовать на экстремум: $z=2x^3+xy^2+5x^2+y^2-1$

Пример 8. Исследовать на экстремум функцию $z=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$

Пример 9. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z=x^2+2y^2+4xy-6x+1$ в области $D:\{x\ge 0,\ y\ge 1,\ x+y\le 3\}$.

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

Пример:

Функцию $f(x;y)=3x^2+2xy-1$ представить в виде многочлена Тейлора по степеням $x-1$, $y+2$.

◐ Принимаем $x+0=1$, $y_0=-2$ и последовательно находим:

$$f(1;-2)=-2,$$

$$df(1;-2) = ((6x+2y)\Delta x + 2x\Delta y)\Big|_{x=1,\ y=-2} = 2\Delta x + 2\Delta y,$$

$$d^2 f(1;-2) = (6\Delta x^2 + 4\Delta x\Delta y)\Big|_{x=1,\ y=-2} = 6\Delta x^2 + 4\Delta x\Delta y.$$

Заменив $\Delta x = x-1$, $\Delta y = y+2$ в формуле Тейлора, получим

$$3x^2+2xy-1 = -2+2(x-1)+2(y+2)+3(x-1)^2+2(x-1)(y+2).$$

В правой части равенства имеем многочлен Тейлора второй степени по степеням $(x-1)$, $(y+2)$. ●

Пример:

Вычислить приближенно функцию $f(x;y)=\sqrt{x^2+y^2}$ в точке $(11{,}8;5{,}3)$, используя формулу Тейлора с $n=2$.

◑ Принимаем $x_0 = 12$, $\Delta x = -0{,}2$, $y_0 = 5$, $\Delta y = 0{,}3$. Имеем

$$f(12;5) = 13,$$

$$df(12;5) = \frac{x\Delta x + y\Delta y}{\sqrt{x^2+y^2}}\Bigg|_{(12;5)} = \frac{-12\cdot 0{,}2 + 5\cdot 0{,}3}{13} \approx -0{,}0692,$$

$$d^2 f(12;5) = \frac{y^2\Delta x^2 - 2xy\Delta x\Delta y + x^2\Delta y^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\Bigg|_{(12;5)} \approx 0{,}0096.$$

Таким образом, $\sqrt{11{,}8^2+5{,}3^2} \approx 13 - 0{,}0692 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}0096 = 12{,}9356$.

Пример:

1. Найдите точки локального экстремума функции

$$u = 2x^2 - xy + 2xz - y + y^3 + z^2$$

△ Для нахождения точек возможного экстремума данной функции вычисляем ее частные производные и приравниваем их нулю:

$$u_x = 4x - y + 2z = 0, \quad u_y = -x - 1 + 3y^2 = 0, \quad u_z = 2x + 2z = 0$$

Решая эту систему трех уравнений, находим две точки возможного экстремума: $M_1(1/3, 2/3, -1/3)$ и $M_2(-1/4, -1/2, 1/4)$.

Далее воспользуемся достаточными условиями экстремума. Для этого вычислим частные производные второго порядка данной функции $u_{xx} = 4$, $u_{xy} = u_{yx} = -1$, $u_{xz} = u_{zx} = 2$, $u_{yy} = 6y$, $u_{yz} = u_{zy} = 0$, $u_{zz} = 2$.

Значения этих частных производных в точке M_1 являются коэффициентами $d^2u\big|_{M_1}$ — квадратичной формы от переменных dx, dy, dz. Матрица этой квадратичной формы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Вычисляя главные миноры матрицы A, получаем

$$\delta_1 = 4 > 0, \quad \delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 15 > 0, \quad \delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 14 > 0$$

Согласно критерию Сильвестра $d^2u\big|_{M_1}$ является положительно определенной квадратичной формой от переменных dx, dy, dz. Следовательно, в точке M_1 функция имеет локальный минимум.

Исследуем теперь точку M_2. Матрица квадратичной формы $d^2u\big|_{M_2}$ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем $\delta_1 = 4 > 0$, $\delta_2 = -13 < 0$, $\delta_3 = -14 < 0$. Следовательно, $d^2u\big|_{M_2}$ не является знакоопределенной квадратичной формой от dx, dy, dz. Нетрудно видеть, что эта квадратичная форма знакопеременная. В самом деле, если положить $dx \neq 0$, $dy = dz = 0$, то получим $d^2u|_{M_2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(M_2)\,dx^2 = 4\,dx^2 > 0$, а если положить $dx = dz = 0$, $dy \neq 0$, то получим $d^2u|_{M_2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(M_2)\,dy^2 = -3\,dy^2 < 0$ Следовательно, в точке M_2 функция не имеет локального экстремума ▲

Пример:

2. Найти точки локального экстремума функции $u = x^2 - 2xy + 4y^3$.

△ Вычисляем частные производные функции и приравниваем их нулю:

$$u_x = 2x - 2y = 0, \qquad u_y = -2x + 12y^2 = 0.$$

Решая эту систему уравнений, получаем две точки возможного экстремума: $M_1(0,0)$ и $M_2(1/6, 1/6)$.

Далее находим частные производные второго порядка: $u_{xx} = 2$, $u_{xy} = -2$, $u_{yy} = 24y$

В точке M_1: $a_{11} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(M_1) = 2$, $a_{12} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}(M_1) = -2$, $a_{22} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(M_1) = 0$. Следовательно, $D = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = -4 < 0$, и, значит, в точке M_1 функция не имеет локального экстремума.

В точке M_2: $a_{11} = 2$, $a_{12} = -2$, $a_{22} = 4$. Следовательно, $D = 2\cdot 4 - (-2)^2 = 4 > 0$ и так как $a_{11} = 2 > 0$, то в точке M_2 функция имеет локальный минимум ▲

Пример: Найти экстремум функции.

200. $z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$, $x > 0$, $y > 0$.

◀ Из системы

$$z'_x = y - \frac{50}{x^2} = 0, \quad z'_y = x - \frac{20}{y^2} = 0$$

находим единственную стационарную точку $x = 5$, $y = 2$, принадлежащую области определения функции. Вычислив производные $z''_{x^2} = \frac{100}{x^3}$, $z''_{xy} = 1$, $z''_{y^2} = \frac{40}{y^3}$ и составив выражение $\Delta(x, y) = \frac{4000}{x^3y^3} - 1$, найдем, что $\Delta(5, 2) = 3 > 0$, а $a_{11}(5, 2) = \frac{4}{5} > 0$. Следовательно, в точке $(5, 2)$ функция имеет минимум ($z_{\min} = 30$). ▶

Пример:

Исследовать на экстремум функцию $f(x;y) = 4x^2y + 24xy + y^2 + 32y - 6$.

◕ Область определения $D(f)$ — вся плоскость Oxy, $f(x;y)$ — дифференцируема в каждой точке $M(x;y) \in D(f)$.

1. Определим стационарные точки (применим теорему 11.18).

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 8xy + 24y = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 4x^2 + 24x + 2y + 32 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(x+3) = 0, \\ 2x^2 + 12x + y + 16 = 0. \end{cases}$$

Отсюда

$$\left[\begin{array}{l} y = 0:\ x^2 + 6x + 8 = 0 \ \Rightarrow\ x_1 = -4,\ x_2 = -2, \\ x = -3,\ y = 2. \end{array}\right.$$

Получили три стационарные точки: $M_1(-4;0)$, $M_2(-2;0)$, $M_3(-3;2)$.

2. Эти точки исследуем согласно теореме 11.19 на достаточность условий экстремума. Сначала определим отдельно

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 8y, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 8x + 24, \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2.$$

А теперь для каждой точки вычислим соответствующие (см. теорему 11.19) A, B, C, определим знаки величин $\Delta = AC - B^2$ и A.

а) $M_1(-4;0)$: $A_1=0$, $B_1=-32+24=-8$, $C_1=2$, $A_1C_1-B_1^2= = -64 < 0$, т. е. $M_1(-4;0)$ не является точкой экстремума.

б) $M_2(-2;0)$: $A_2=0$, $B_2=-16+24=8$, $C_2=2$, $A_2C_2-B_2^2<0$, т. е. $M_2(-2;0)$ не является точкой экстремума.

в) $M_3(-3;2)$: $A_3 = 16$, $B_3 = 0$, $C_3 = 2$, $A_3C_3 - B_3^2 = 32 > 0$. При этом $A > 0$. Вывод: $M_3(-3;2)$ — точка локального минимума функции $f(x;y)$ с $f_{\min} = f(-3;2) = -10$.

Ответ. $\min f(x;y) = f(-3;2) = -10$. ●

Пример:

1. Методом исключения части переменных найти экстремум функции

$$u = x + y + z^2 \tag{11}$$

при условиях связи

$$\begin{cases} z - x = 1, \\ y - xz = 1. \end{cases} \tag{12}$$

△ Решая систему уравнений (12) относительно y и z, находим

$$y = x^2 + x + 1, \qquad z = x + 1. \tag{13}$$

Подставляя выражения (13) в равенство (11), приходим к функции одной переменной x: $u(x) = 2x^2 + 4x + 2$, для которой рассмотрим задачу о безусловном экстремуме. Так как $u' = 4(x+1) = 0$ при $x = -1$, то функция $u(x)$ имеет единственную точку возможного экстремума. Но $u''(-1) = 4 > 0$, поэтому при $x = -1$ функция $u(x)$ имеет минимум. Из системы (13) находим соответствующие $x = -1$ значения y и z: $y = 1, z = 0$. Итак, функция (11) при условиях связи (12) имеет в точке $(-1,1,0)$ минимум, причем $u(-1,1,0) = 0$. ▲

Пример:

3. Методом Лагранжа найти экстремум функции (11) при условиях связи (12).

△ Составим функцию Лагранжа

$$\Phi = x + y + z^2 + \lambda_1(z - x - 1) + \lambda_2(y - xz - 1)$$

и рассмотрим систему уравнений (9):

$$\begin{cases} F_i(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, k), \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_m, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Phi}{\partial x} = 1 - \lambda_1 - \lambda_2 z = 0, \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial y} = 1 + \lambda_2 = 0, \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial z} = 2z + \lambda_1 - \lambda_2 x = 0, \\ F_1 = z - x - 1 = 0, \\ F_2 = y - xz - 1 = 0. \end{cases}$$

Она имеет единственное решение: $x = -1$, $y = 1$, $z = 0$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, т. е. $M_0(-1, 1, 0)$ — единственная точка возможного экстремума функции (11) при условиях связи (12). Отметим, что в окрестности точки M_0 система (12) определяет единственную пару неявных функций $y(x)$, $z(x)$. Хотя в данном случае их легко найти в явном виде, нам эти явные выражения не понадобятся. Предполагая, что в систему (12) подставлено ее решение $y(x)$, $z(x)$, и дифференцируя полученные тождества, приходим к равенствам

$$\begin{cases} dz - dx = 0, \\ dy - x\,dz - z\,dx = 0. \end{cases}$$

Отсюда находим

$$\begin{cases} dz = dx, \\ dy = (x + z)\,dx. \end{cases} \tag{18}$$

Теперь вычисляем второй дифференциал функции Лагранжа:

$$d^2\Phi = 2(dz)^2 - 2\lambda_2\,dx\,dz,$$

и, подставляя $\lambda_2 = -1$ и выражение (18) для dz, получаем положительно определенную квадратичную форму от одной переменной dx: $4(dx)^2$. Отсюда следует, что функция (11) при условиях связи (12) имеет в точке M_0 условный минимум. ▲

Пример: Найти условный экстремум функции.

218. $u = xyz$, если $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.

◀ Аналогично предыдущему примеру составляем функцию Лагранжа $\Phi = xyz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 3)$ и записываем систему для определения λ и координат точки возможного экстремума:

$$\Phi'_x = yz + 2\lambda x = 0, \quad \Phi'_y = xz + 2\lambda y = 0, \quad \Phi'_z = xy + 2\lambda z = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 3.$$

Из этой системы находим восемь стационарных точек: $M_1 = (1, 1, 1)$, $M_2 = (1, -1, -1)$, $M_3 = (-1, 1, -1)$, $M_4 = (-1, -1, 1)$ для $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ и $M_5 = (-1, -1, -1)$, $M_6 = (-1, 1, 1)$, $M_7 = (1, -1, 1)$, $M_8 = (1, 1, -1)$ для $\lambda_2 = \frac{1}{2}$.

Находим второй дифференциал функции Лагранжа

$$d^2\Phi = 2\lambda(dx^2 + dy^2 + dz^2) + 2z\,dx\,dy + 2y\,dx\,dz + 2x\,dy\,dz. \tag{1}$$

Для $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ и точки M_1 имеем

$$d^2\Phi(M_1, \lambda_1) = -dx^2 - dy^2 - dz^2 + 2\,dx\,dy + 2\,dx\,dz + 2\,dy\,dz = -(dx - dy)^2 - dz^2 + 2(dx + dy)\,dz.$$

Заменяя в последнем слагаемом дифференциал dz его значением, найденным из уравнения связи в точке M_1, $dz = -(dx + dy)$, получаем неравенство $d^2\Phi(M_1, \lambda_1) = -(dx - dy)^2 - dz^2 - 2(dx + dy)^2 < 0$, из которого следует, что в точке M_1 функция u имеет максимум.

Для $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ и точки M_2 из (1) и уравнения связи получаем $d^2\Phi(M_2, \lambda_1) = -dx^2 - dy^2 - dz^2 - 2\,dx\,dy - 2\,dx\,dz + 2\,dy\,dz$, $dx = dy + dz$ и, следовательно, $d^2\Phi(M_2, \lambda_1) = -(dx - dy)^2 - dz^2 - 2(dy + dz)^2 < 0$, поэтому функция u в точке M_2 имеет максимум. Аналогично устанавливаем, что функция u имеет максимум в точках M_3 и M_4. Во всех этих точках $u_{\max} = 1$.

Для $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ и точки M_5 из (1) и уравнения связи получаем $d^2\Phi(M_5, \lambda_2) = dx^2 + dy^2 + dz^2 - 2\,dx\,dy - 2\,dx\,dz - 2\,dy\,dz$, $dx + dy + dz = 0$. Отсюда следует неравенство $d^2\Phi(M_5, \lambda_2) = (dx - dy)^2 + dz^2 + 2(dx + dy)^2 > 0$, из которого заключаем, что в точке M_5 функция u имеет минимум.

Легко убедиться, что в точках M_6, M_7 и M_8 функция u также имеет минимум, причем $u_{\min} = -1$. ►

Пример: Найти условный экстремум функции.

222. $u = xyz$, если $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x + y + z = 0$.

◄ Приравнивая к нулю производные функции Лагранжа $\Phi = xyz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1) + \mu(x + y + z)$ по x, y и z, получаем систему

$$\Phi'_x = yz + 2\lambda x + \mu = 0, \quad \Phi'_y = xz + 2\lambda y + \mu = 0, \quad \Phi'_z = xy + 2\lambda z + \mu = 0,$$

решая которую совместно с уравнениями связи $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x + y + z = 0$, находим шесть точек возможного экстремума: $M_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$, $M_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, $M_3 = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ при $\lambda = \frac{1}{2\sqrt{6}}$; $M_4 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$, $M_5 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, $M_6 = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ при $\lambda = -\frac{1}{2\sqrt{6}}$.

Далее находим второй дифференциал

$$d^2\Phi = 2\lambda(dx^2 + dy^2 + dz^2) + 2z\,dx\,dy + 2y\,dx\,dz + 2x\,dy\,dz, \tag{1}$$

а из уравнений связи получаем соотношения

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0, \quad dx + dy + dz = 0. \tag{2}$$

Проверим выполнение достаточных условий для точек M_1 и M_4.

Для этих точек

$$x = y = 2\lambda, \quad z = -4\lambda. \tag{3}$$

Тогда из (1), (2) и (3) получим равенство

$$d^2\Phi = 2\lambda((dx - dy)^2 + dz^2 + dx^2 + dy^2).$$

Отсюда следует, что при $\lambda < 0$ (т. е. в точке M_4) $d^2\Phi < 0$ и в этой точке функция u имеет максимум $\left(u_{\max} = \frac{1}{3\sqrt{6}}\right)$. При $\lambda > 0$ (т. е. в точке M_1) $d^2\Phi > 0$, поэтому в этой точке функция u имеет минимум $\left(u_{\min} = -\frac{1}{3\sqrt{6}}\right)$.

Аналогично устанавливаем, что в точках M_5 и M_6 функция u имеет максимум $\left(u_{\max} = \frac{1}{3\sqrt{6}}\right)$, а в точках M_2 и M_3 — минимум $\left(u_{\min} = -\frac{1}{3\sqrt{6}}\right)$. ►

Пример: Найти условный экстремум функции.

223. $u = xy + yz$, если $x^2 + y^2 = 2$, $y + z = 2$ $(x > 0,\ y > 0,\ z > 0)$.

◄ Образовав функцию Лагранжа $\Phi = xy + yz + \lambda(x^2 + y^2 - 2) + \mu(y + z - 2)$ и составив систему

$$\Phi'_x = y + 2\lambda x = 0, \quad \Phi'_y = x + z + 2\lambda y + \mu = 0, \quad \Phi'_z = y + \mu = 0, \quad x^2 + y^2 = 2, \quad y + z = 2,$$

найдем числа λ, μ и координаты стационарной точки: $x = y = z = 1$, $\lambda = -\frac{1}{2}$, $\mu = -1$.

Запишем второй дифференциал $d^2\Phi = 2\lambda(dx^2 + dy^2) + 2\,dx\,dy + 2\,dy\,dz$ и положим в нем $\lambda = -\frac{1}{2}$. Тогда получим $d^2\Phi = -dx^2 - dy^2 + 2\,dx\,dy + 2\,dy\,dz$. Из уравнения связи следует, что $dy = -dz = -dx$, поэтому $d^2\Phi = -dx^2 - 3\,dy^2 - 2\,dz^2 < 0$. Таким образом, в точке $(1, 1, 1)$ функция u имеет максимум, равный 2. ►

Пример:

Определить наибольшее (sup) и наименьшее (inf) значения функций в указанных областях:

234. $u = x + y + z$, если $x^2 + y^2 \leqslant z \leqslant 1$.

◀ Легко убедиться, что функция u не может иметь экстремума во внутренних точках области определения, поэтому $\sup u$ и $\inf u$ достигаются или на основании конуса $0 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 1$, $z = 1$, или на боковой поверхности конуса $z = x^2 + y^2$, $0 \leqslant z < 1$.

Пусть $0 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 1$, $z = 1$. Составляя функцию Лагранжа $\Phi = x + y + 1 + \lambda(1 - x^2 - y^2)$, из системы

$$\Phi'_x = 1 - 2\lambda x = 0,\ \Phi'_y = 1 - 2\lambda y = 0,\ x^2 + y^2 = 1$$

находим четыре точки возможного экстремума:

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right).$$

Теперь находим точки возможного экстремума функции $u = x + y + x^2 + y^2$, если $0 \leqslant x^2 + y^2 < 1$. Имеем $u'_x = 1 + 2x = 0$, $u'_y = 1 + 2y = 0$. Отсюда и из условия $z = x^2 + y^2$ получаем еще одну точку возможного экстремума $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Вычисляя значения функции u в найденных точках, заключаем, что $\sup u = 1+\sqrt{2}$, $\inf u = -\frac{1}{2}$. ▶

Пример:

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = -10xy^2 + x^2 + 10x + 1$ в замкнутой области D: $\frac{|x|}{7} + \frac{|y|}{2} \leqslant 1$.

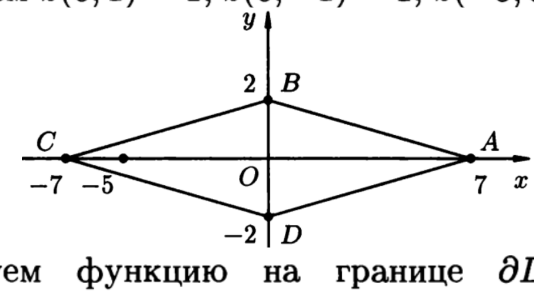
1. Исследуем функцию на локальный экстремум внутри D.

$$\begin{cases} z'_x = -10y^2 + 2x + 10 = 0, \\ z'_y = -20xy = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = \pm 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = -5, \\ y = 0. \end{cases}$$

Получили три стационарные точки, которые все лежат в области $\bar{D}$: $M_1(0;1)$, $M_2(0;-1)$, $M_3(-5;0)$.

Примечание. При поиске наибольшего и наименьшего значений функции в области не обязательно находить характер точек экстремума, т. е. достаточные условия можно опускать. Надо найти значения функции в этих стационарных точках и среди них выбирать наибольшее и наименьшее.

Итак, имеем $z(0;1) = 1$, $z(0;-1) = 1$, $z(-5;0) = -24$.



2. Исследуем функцию на границе ∂D области D: $\left|\frac{x}{7}\right| + \left|\frac{y}{2}\right| = 1$ — представляет собой ромб $ABCD$ (см. рис. 130).

Заметим, что $z(y) = z(-y)$, т. е. функция принимает одинаковые значения в точках $(x;y)$ и в точках $(x;-y)$ (имеем четность по переменной y). Отсюда следует вывод о достаточности рассмотрения границы ABC ромба $ABCD$.

Один из способов дальнейшего исследования такой. Составим уравнения для AB и BC, подставим их в z, получим функции одной переменной, которые исследуем на экстремум.

Другой способ — это условный экстремум. На отрезке AB рассмотрим первый способ, т. е. обычный экстремум, а на BC — условный экстремум.

а) Уравнение отрезка AB — это $y = 2 - \frac{2x}{7}$, $0 \leqslant x \leqslant 7$. Подставляем его в выражение нашей функции

$$z = -10xy^2 + x^2 + 10x + 1 = -10x\left(2 - \frac{2x}{7}\right)^2 + x^2 + 10x + 1 =$$

$$= -40x + \frac{80}{7}x^2 - \frac{40}{49}x^3 + x^2 + 10x + 1 = -\frac{40}{49}x^3 + \frac{87}{7}x^2 - 30x + 1.$$

Дифференцируем:

$$z' = -\frac{120}{49}x^2 + \frac{174}{7}x - 30 = 0,$$

отсюда $x = \left(\frac{87}{7} \pm \frac{63}{7}\right) \cdot \frac{49}{120}$, $x_1 = \frac{35}{4}$ — не принадлежит отрезку $[0; 7]$, $x_2 = \frac{7}{5} = 1{,}4$.

Нам необязательно знать, что это за точка — максимума или минимума. Вычислим $z\left(\frac{7}{5}\right)$. Поскольку при $x = 1{,}4$ получаем $y = 2 - \frac{2x}{7} = 1{,}6$, то достаточно вычислить

$$z(x; y) = z(1{,}4; 1{,}6) = -10 \cdot 1{,}4 \cdot 1{,}6^2 + 1{,}4^2 + 10 \cdot 1{,}4 + 1 =$$
$$= -35{,}84 + 1{,}96 + 14 + 1 = -18{,}88.$$

Отдельно считаем $z(A)$ и $z(B)$, т. е. $z(7; 0) = 120$, $z(0; 2) = 1$.

б) На BC займемся условным экстремумом. Поскольку уравнение прямой BC — это $-\frac{x}{7} + \frac{y}{2} = 1$, то составим функцию Лагранжа:

$$F(x; y; \lambda) = -10xy^2 + x^2 + 10x + 1 + \lambda\left(-\frac{x}{7} + \frac{y}{2} - 1\right).$$

Ищем стационарные точки этой функции:

$$\begin{cases} F'_x = -10y^2 + 2x + 10 - \frac{\lambda}{7} = 0, & \times 7 \\ F'_y = -20xy + \frac{\lambda}{2} = 0, & \times 2 \\ F'_\lambda = -\frac{x}{7} + \frac{y}{2} - 1 = 0. \end{cases}$$

Первое уравнение умножим на 7, второе — на 2 и сложим результаты. Этим исключим параметр λ из системы:

$$\begin{cases} -70y^2 - 40xy + 14x + 70 = 0, \\ x = \frac{7y}{2} - 7. \end{cases}$$

Непосредственной подстановкой приходим к уравнению, которое после сокращений имеет вид $30y^2-47y+4=0$. Отсюда находим $y = \dfrac{47 \pm 41{,}6}{60}$. Сразу получим точки $(y_1 = 1{,}5,\ x_1 = -1{,}75)$, $(y_2 = 0{,}1,\ x_1 = -6{,}65)$, т. е. $M_1(-1{,}75; 1{,}5)$, $M_2(-6{,}65; 0{,}1)$.

Результаты вычислений значений функции в M_1, M_2 и C таковы: $z(M_1) \approx -25{,}935$, $z(M_2) \approx -22{,}9$, $z(C) = 20$.

Сравнивая все полученные величины, приходим к выводу: наибольшее значение функции в D, т. е. $\max\limits_{(x;y)\in D} f(x;y) = f(7;0) = 120$, а наименьшее значение, т. е. $\min\limits_{(x;y)\in D} f(x;y) = f(-5;0) = -24$. ●